Введение в логику

Лекция 5

hexlet.org

Теории: интуиция

Теорема 1.4. $\forall x, (P(x) \to Q) = (\exists x, P(x)) \to Q$.

Теорема 1.4. $\forall x,\ (P\ (x) \to Q) = (\exists x,\ P\ (x)) \to Q.$

$\forall x,\ (P\ (x) \to Q)$

Теорема 1.4. $\forall x,\ (P\ (x) \to Q) = (\exists x,\ P\ (x)) \to Q.$

$\forall x,\ (P\ (x) \to Q)$

$P\ (a) \to Q$

Теорема 1.4. $\forall x, (P(x) \to Q) = (\exists x, P(x)) \to Q$.

$\forall x, (P(x) \to Q)$

$P(a) \to Q$

Пусть $P(a)$ истинно, тогда Q истинно.

Теорема 1.4. $\forall x,\ (P\ (x) \to Q) = (\exists x,\ P\ (x)) \to Q$.

$\forall x,\ (P\ (x) \to Q)$

$P\ (a) \to Q$

Пусть $P\ (a)$ истинно, тогда Q истинно.

$P\ (a) \vdash Q$

Теорема 1.4. $\forall x,\ (P\ (x) \to Q) = (\exists x,\ P\ (x)) \to Q$.

$\forall x,\ (P\ (x) \to Q)$

$P\ (a) \to Q$

Пусть $P\ (a)$ истинно, тогда Q истинно.

$P\ (a) \vdash Q$

Можно заменить $P(a)$ на $\exists x,\ P(x)$
$\exists x, P(x) \vdash Q$

Теорема 1.4. $\forall x,\ (P\ (x) \to Q) = (\exists x,\ P\ (x)) \to Q$.

$\forall x,\ (P\ (x) \to Q)$

$P\ (a) \to Q$

Пусть $P\ (a)$ истинно, тогда Q истинно.

$P\ (a) \vdash Q$

Можно заменить $P(a)$ на $\exists x,\ P(x)$

$\exists x, P(x) \vdash Q$

$(\exists x,\ P(X)) \to Q$

Теорема 1.4. $\forall x, (P(x) \to Q) = (\exists x, P(x)) \to Q$.

$\forall x, (P(x) \to Q)$

$P(a) \to Q$

Пусть $P(a)$ истинно, тогда Q истинно.

$P(a) \vdash Q$

Можно заменить $P(a)$ на $\exists x, P(x)$

$\exists x, P(x) \vdash Q$

$(\exists x, P(X)) \to Q$

Упражнение 1.9. Докажите теорему 1.4 таким же способом в обратную сторону.

$\exists x \exists y,\ x \neq y$

возьмём конкретные значения a и b,
такие что $a \neq b$

$\forall b,\ a \neq b$
$a \neq a$

Нам нужна четкая система математических доказательств

Предложение

Некоторое высказывание, составленное по каким-то простым правилам (возможно, из других высказываний).

Примеры:

1. $\forall x(P\ (x) \to Q)$

2. «любые две прямые либо пересекаются ровно в одной точке, либо не пересекаются вообще»

$$\forall l \forall k,\ P\ (l,\ k) \oplus C(l,\ k)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$

каждое предложение доказательства должно быть *логическим следствием* некоторых предыдущих предложений

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$

каждое предложение доказательства должно быть логическим следствием некоторых предыдущих предложений

каждое логическое следствие является набором предложений-посылок и связанными с ними символом $\vdash$ предложением-результатом

Пример: дедукция

$$\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$$

(если $\alpha \to \beta$ и истинно α, то отсюда следует β)

$$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vdash \beta$$

(если верно $\alpha \vee \beta$ и известно, что α ложно, то тогда отсюда следует, что истинно β)

Аксиомы

Пусть нам известно, что истинными являются высказывания
$\neg a$, $a \vee b$ и $b \to c$.

Все вместе эти аксиомы и возможные их следствия обозначим как T.

Аксиомы

Пусть нам известно, что истинными являются высказывания
$\neg a$, $a \vee b$ и $b \to c$.

Все вместе эти аксиомы и возможные их следствия обозначим как T.

Примеры:

1. $T \vdash b$ (первые две аксиомы и правило вывода)
2. $T \vdash c$ (из правила дедукции и третьей аксиомы)

Примеры:

1. $T \vdash b$ (первые две аксиомы и правило вывода)
2. $T \vdash c$ (из правила дедукции и третьей аксиомы)

Теоремы

Пример

Наша аксиома:

$$\neg(p \wedge q)$$

1. $\neg(p \wedge q)$ – дано
2. (*) $\neg(\neg p \vee \neg q)$
3. (**) $\neg p$
4. (**) $\neg p \vee \neg q$ — введение дизъюнкции;
5. (*) $\neg\neg p$ — противоречие между 2 и 4. Предположение 3(**) было неверным.
6. (*) p
7. (***) $\neg q$
8. (***) $\neg p \vee \neg q$ — введение дизъюнкции;
9. (*) $\neg\neg q$ — из противоречия 8 и 2 заключаем, что было ложным предположение 7(***);
10. (*) q
11. (*) $p \wedge q$ — введение конъюнкции для 6 и 10;
12. $\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$ — из противоречия 11 и 2 заключаем, что предположение 2(*) ложно;
13. $\neg p \vee \neg q$

Посылка	Следствие	Наименование
$\neg\neg\phi$	ϕ	сокращение двойного отрицания
ϕ	$\neg\neg\phi$	введение двойного отрицания
ϕ, χ	$\phi \wedge \chi$	введение конъюнкции
$\phi \wedge \chi$	ϕ	сокращение конъюнкции
ϕ	$\phi \vee \chi$	введение дизъюнкции
$\phi \vee \chi, \neg\phi$	χ	дизъюнктивный силлогизм
$\phi \leftrightarrow \chi, \phi$	χ	сокращение эквиваленции (1)
$\phi \leftrightarrow \chi, \neg\phi$	$\neg\chi$	сокращение эквиваленции (2)
$\phi \leftrightarrow \chi, \phi \vee \chi$	$\phi \wedge \chi$	сокращение эквиваленции (3)
$\phi \leftrightarrow \chi, \neg\phi \vee \neg\chi$	$\neg\phi \wedge \neg\chi$	сокращение эквиваленции (4)
$T, \phi \vdash \chi$	$T \vdash \phi \to \chi$	теорема дедукции (1)
$T \vdash \phi \to \chi$	$T, \phi \vdash \chi$	теорема дедукции (2)
$\phi, \phi \to \chi$	χ	modus ponens
$\neg\chi, \phi \to \chi$	$\neg\phi$	modus tollens
$\phi \vee \chi, \phi \to \theta, \chi \to \theta$	θ	анализ частных
$\phi \to \chi, \chi \to \phi$	$\phi \leftrightarrow \chi$	введение эквиваленции

ΑΝ ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜ

ΤΜΗΘΗ ΕΙΣ ΙΣΑ ΚΑΙ Α

ΙΣΑ ΤΟ ΥΠΟ ΤΩΝ Α

ΤΩΝ ΤΗΣ ΟΛΗΣ ΤΜΗΜ ΝΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΝ

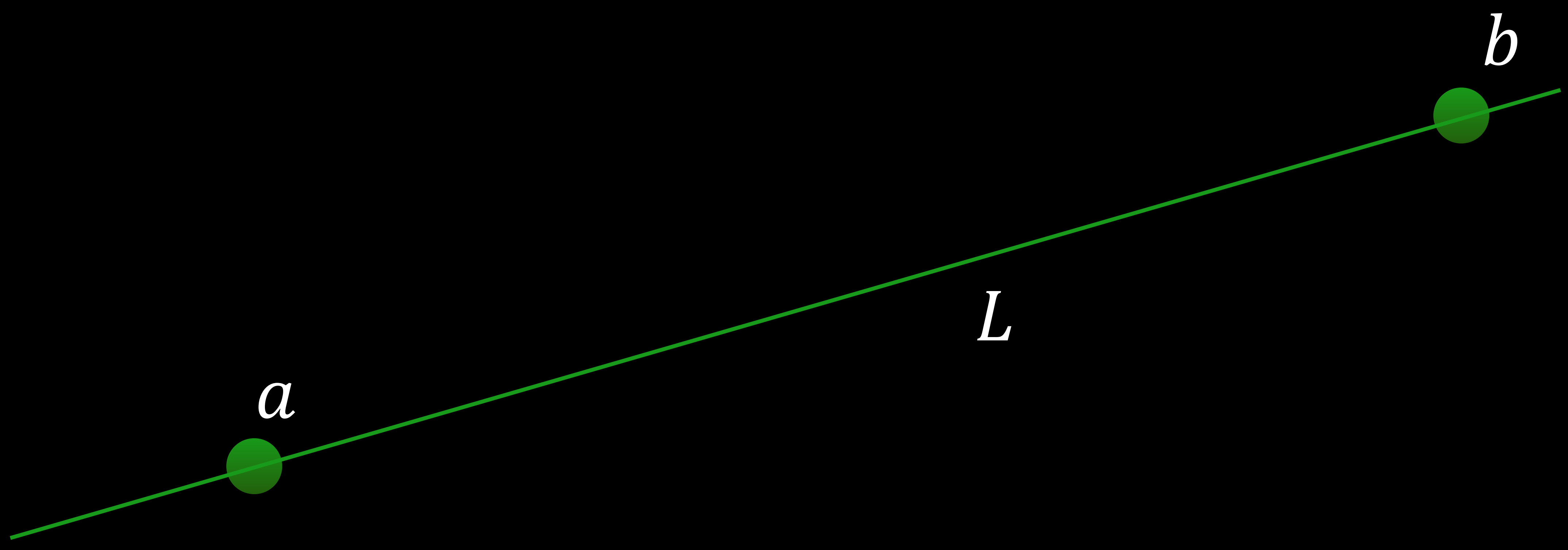
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΜΕΤΑ ΤΟΥ ΑΠΟ ΤΗΣ ΜΕΤΑΞΥ

ΤΩΝ ΤΟΜΩΝ ΤΕΤ ΝΟΥ ΙΣΟΝ ΕΣΤΙΝ

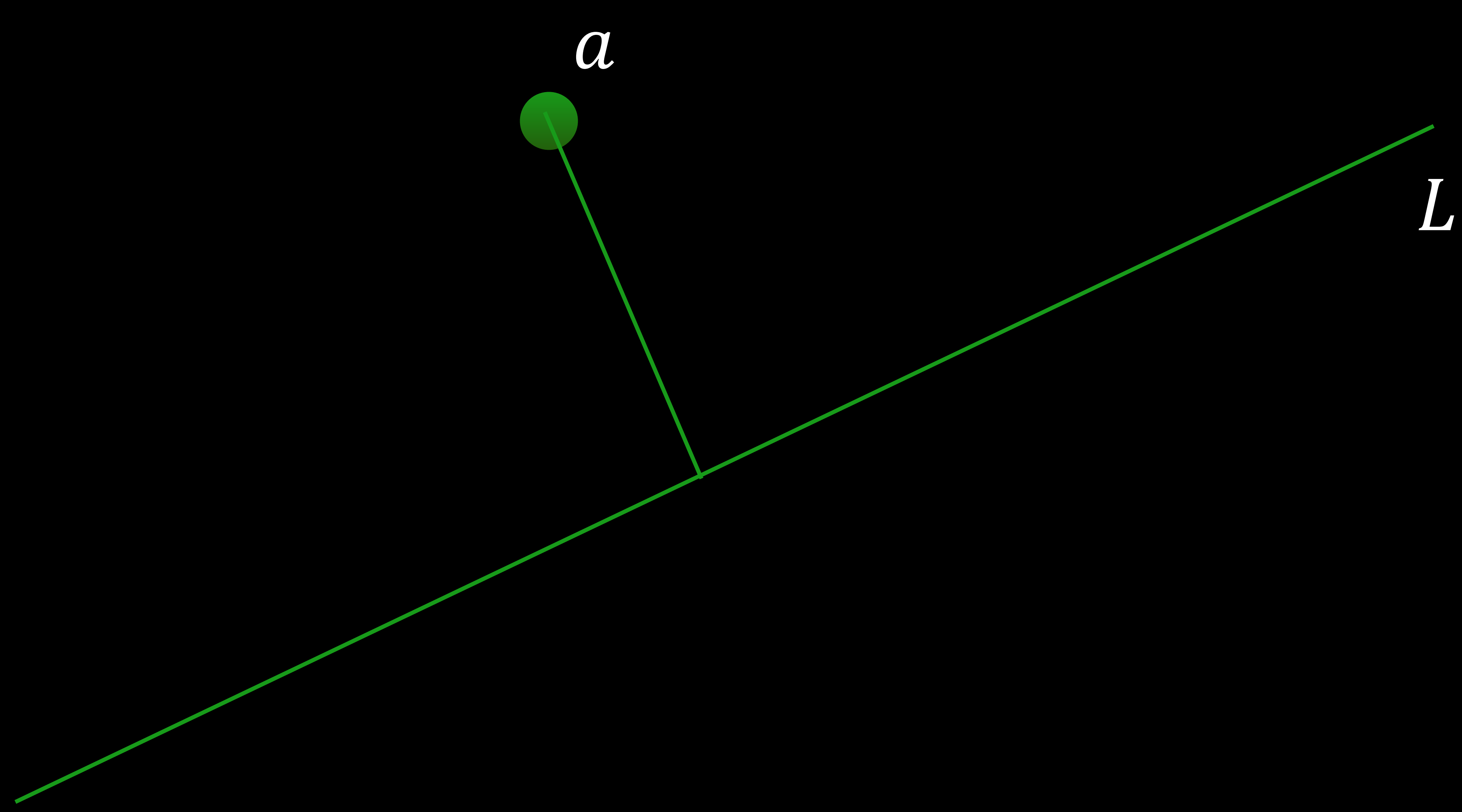
ΤΩ ΑΠΟ ΤΗΣ ΗΜΙ

ΔΕ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΙ

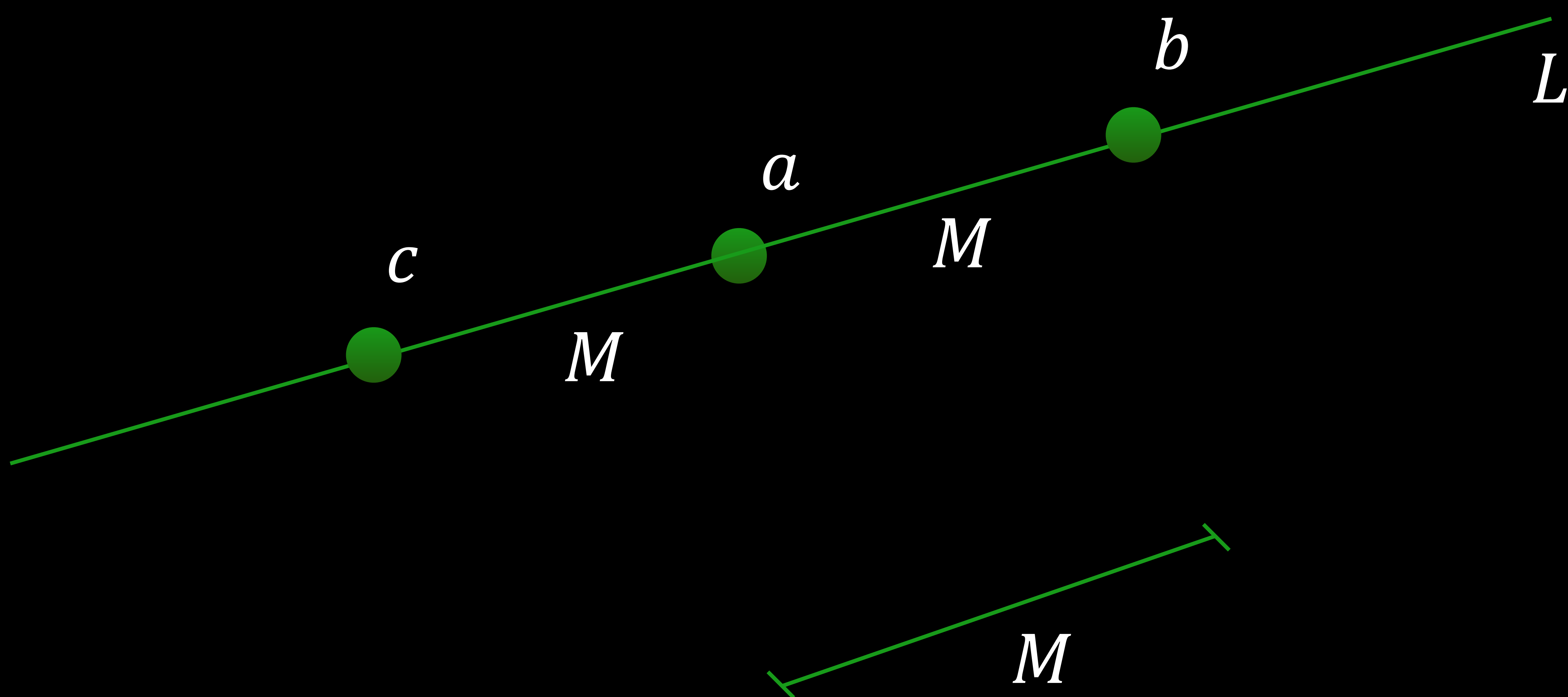
1. Пусть a и b — две различные точки. Тогда через них можно провести единственную прямую L.



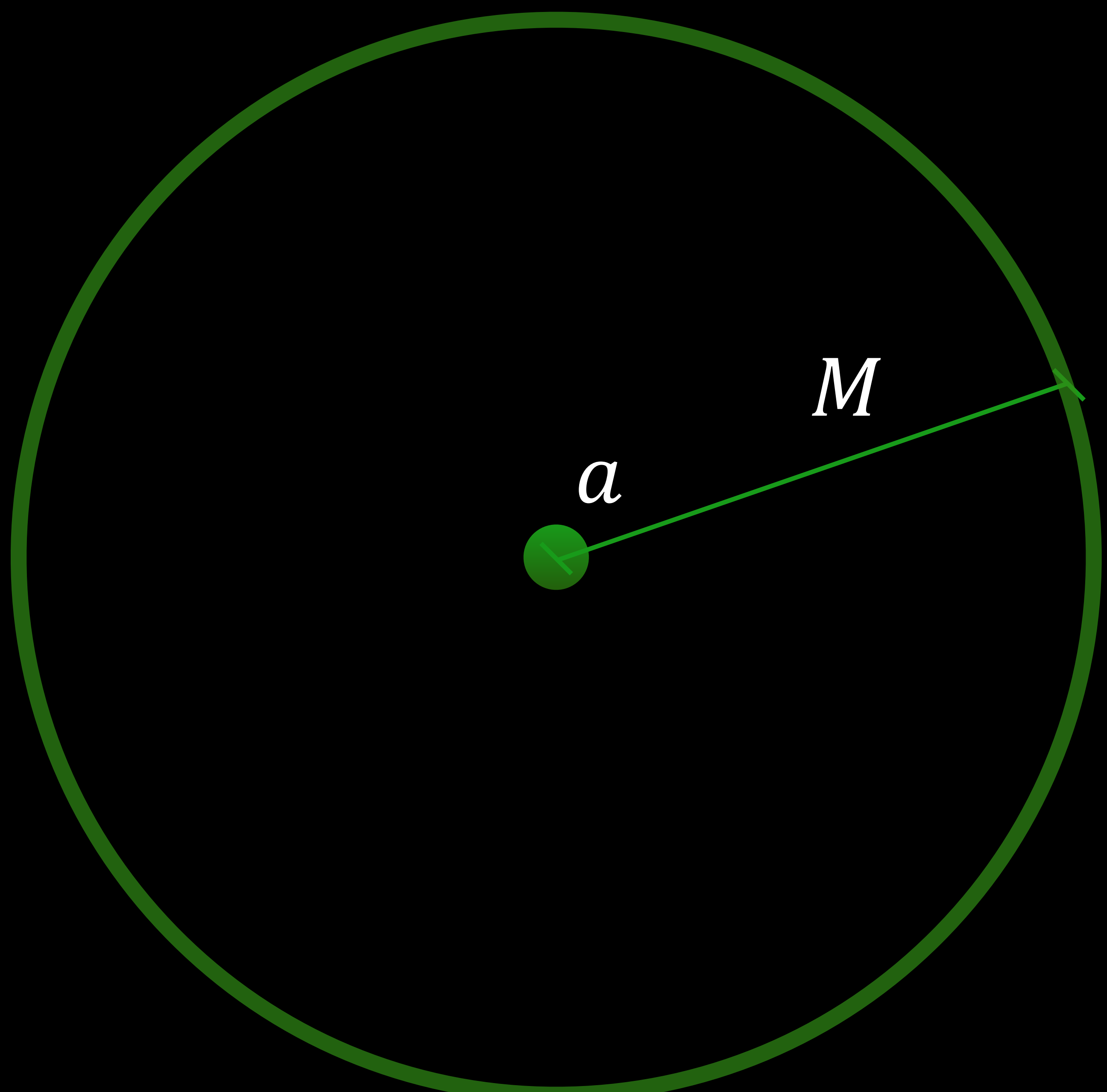
2. Пусть a — точка, не лежащая на прямой L. Тогда из a на L можно опустить единственный перпендикуляр.



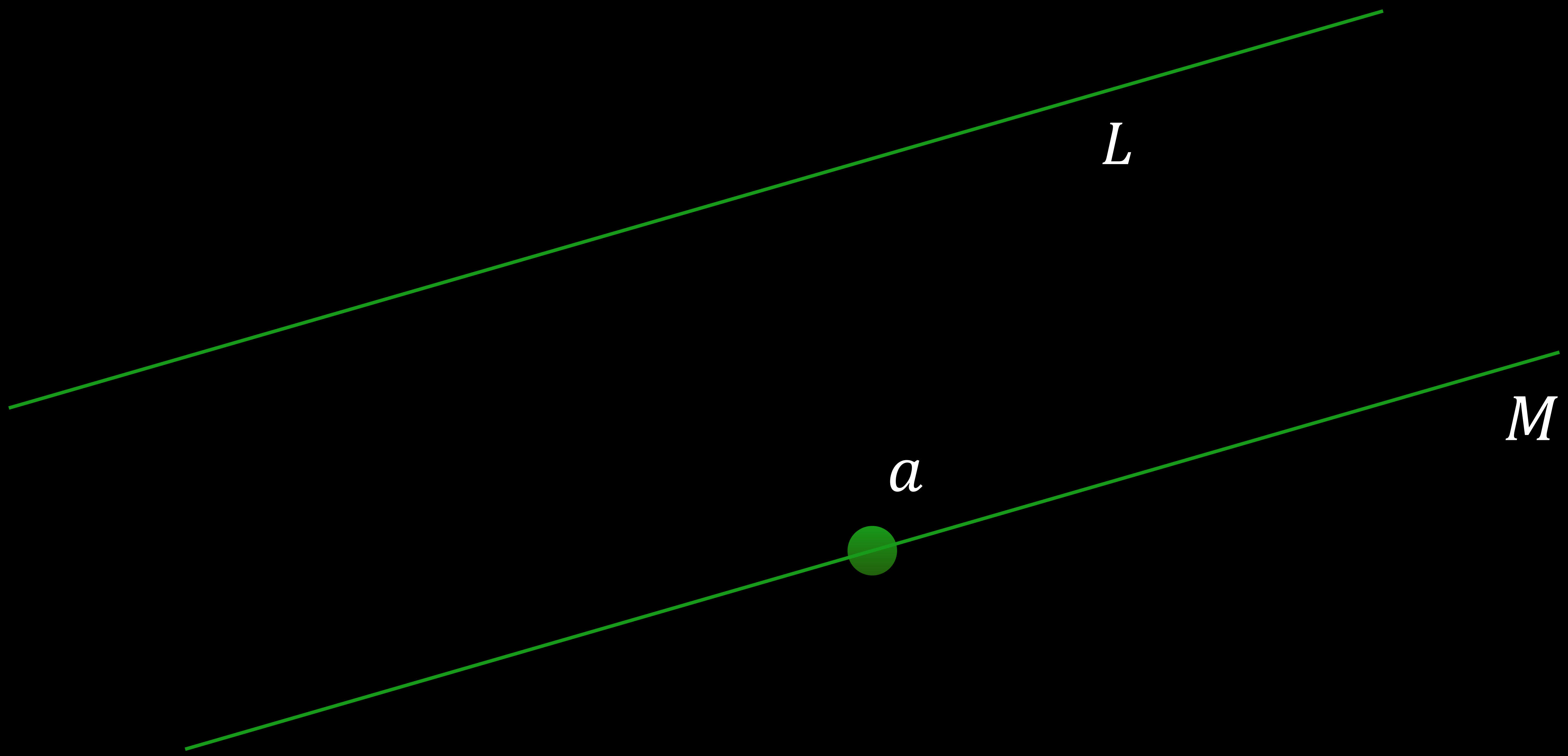
3. Пусть a — точка, лежащая на прямой L, а M — некоторый отрезок. Тогда на прямой L можно построить различные точки b и c, лежащие от a на расстоянии, равном M.



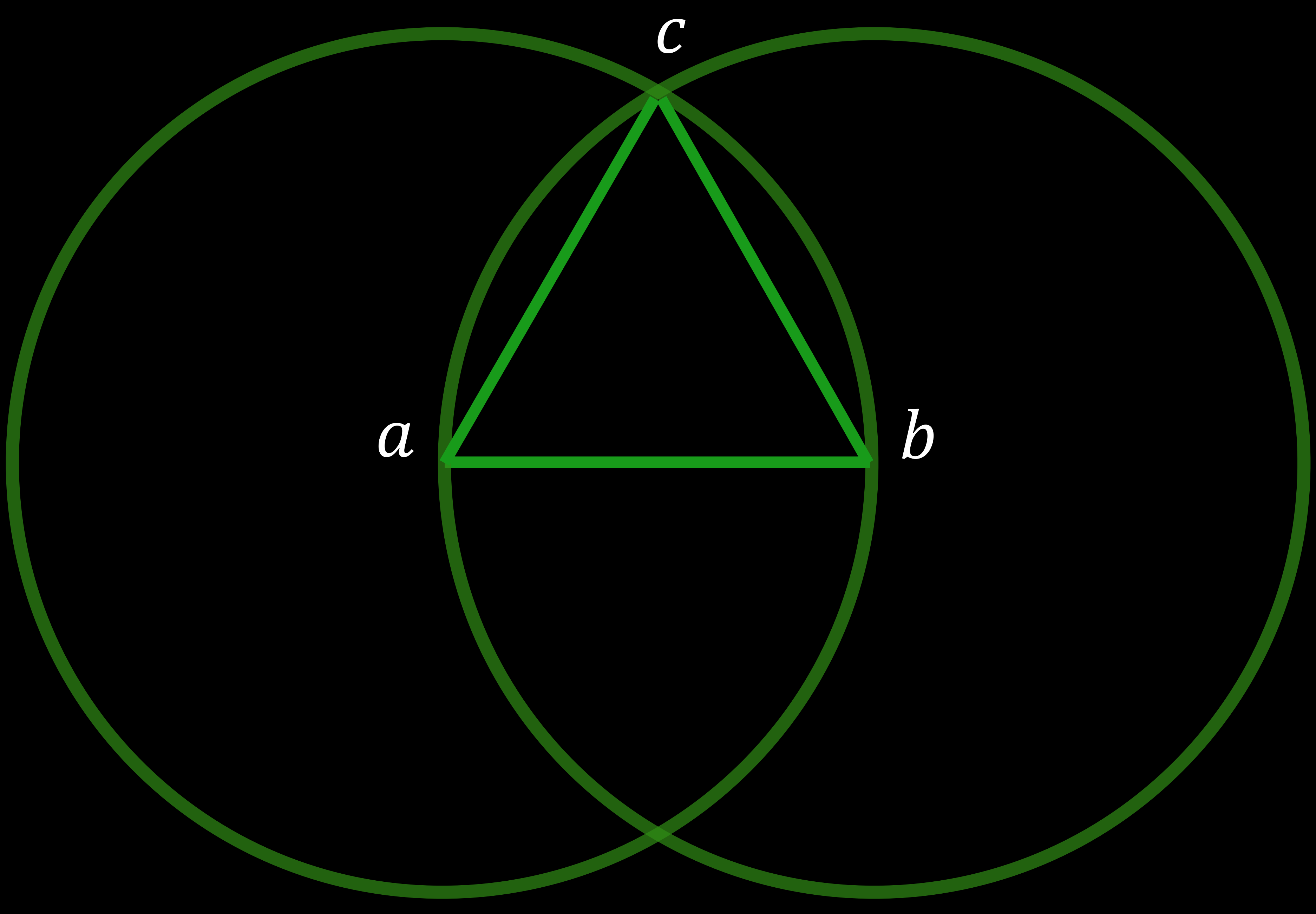
4. Пусть a — точка и M — отрезок. Можно построить единственную окружность с центром a и радиусом, равным M.



5. Пусть L — прямая, и a — точка, на ней не лежащая. Тогда можно построить единственную прямую M , которая будет проходить через a и будет параллельна L.



Теорема: для любого отрезка с концами ab возможно построить равносторонний треугольник abc.



Проблема: пересечение окружностей не доказывается аксиомами.

Что делать?

1. мы просто не смогли найти пока доказательство, так как это может быть сложно;

2. что-то не так с нашей логикой, возможно нам не хватает правил вывода;

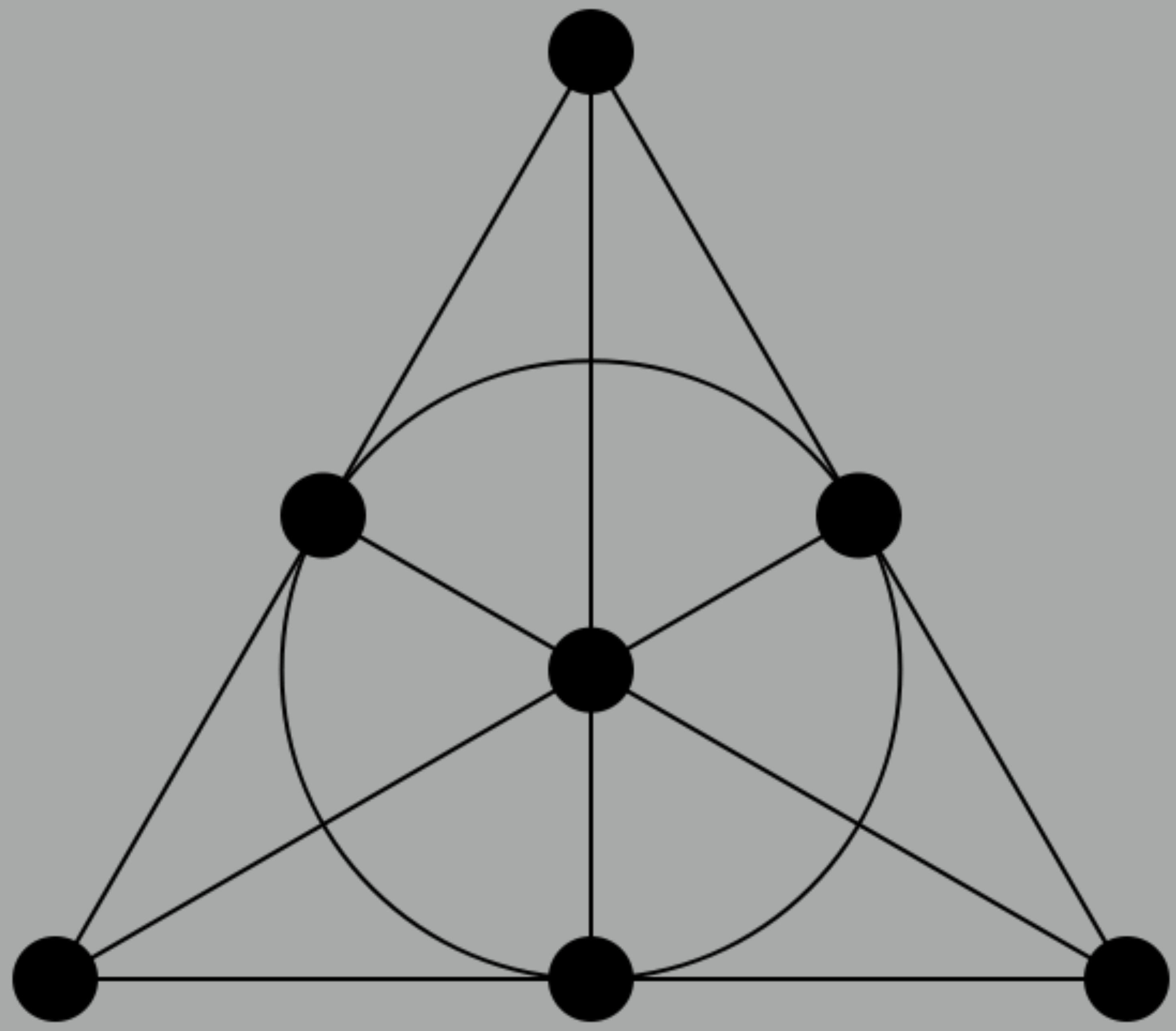
3. что-то не так с нашими аксиомами, возможно их слишком мало и их надо дополнить.

Введем систему аксиом:

1. Любые две прямые пересекаются ровно в одной точке;

2. Через любые две точки проходит ровно одна прямая;

3. Существуют четыре точки такие, что они не лежат на одной прямой.



Плоскость Фано

Упражнение 1.12. Докажите, что из сформулированных аксиом можно вывести, что существуют четыре линии, не пересекающиеся в одной точке.

Определение 1.5. Система аксиом называется неполной, если существует предложение φ такое, что из аксиом невозможно вывести ни φ ни $\neg\varphi$.

Определение 1.6. Система аксиом называется полной, если для любого предложения φ можно вывести либо φ, либо $\neg\varphi$.

Определение 1.7. Структурой называется такое множество предложений X, что для любого предложения p либо $p \in X$, либо $\neg p \in X$.

Определение 1.8. Моделью теории T называется такая структура M, что для любого $p \in T$ верно, что $p \in M$. Множество всех моделей теории T обозначается как Mod T .

Определение 1.9. Теория называется *удовлетворимой*, если она обладает моделью. В противном случае она называется *неудовлетворимой*.

Определение 1.10. Предложение p называется *синтаксически истинным* в теории T (обозначение $T \vdash p$), если его возможно вывести в данной теории пользуясь правилами вывода.

Определение 1.11. Предложение называется *семантически истинным* в теории T (обозначение $T \models p$), если оно истинно в любой модели данной теории.

Определение 1.12. Набор правил вывода называется *полным*, если из семантической истинности предложения следует его синтаксическая истинность.

Определение 1.14. Теория называется противоречивой, если в ней выводимы одновременно некоторое высказывание p и $\neg p$. В противном случае теория называется непротиворечивой.

Теорема 1.5. В противоречивой теории любое предложение синтаксически истинно.

Доказательство. Пусть мы вывели p и $\neg p$ и хотим вывести q.

$p \vee q$

следовательно, q – истинно.