Введение в логику

Лекция 4

hexlet.org

Предикаты и кванторы

Определение 1.1. Множеством мы будем называть неупорядоченный набор различимых объектов, называемых элементами множества.

$$x \in S$$

$$\neg(x \in S) \qquad x \notin S$$

“hexlet.org” $\in$ “Множество сайтов”

“Ленин” $\notin$ “Множество президентов США”

P = «Василий Тягин — потомок Васи Квакина»

P = «Василий Тягин — потомок Васи Квакина»

$P(x,y)$ = «x — потомок y»

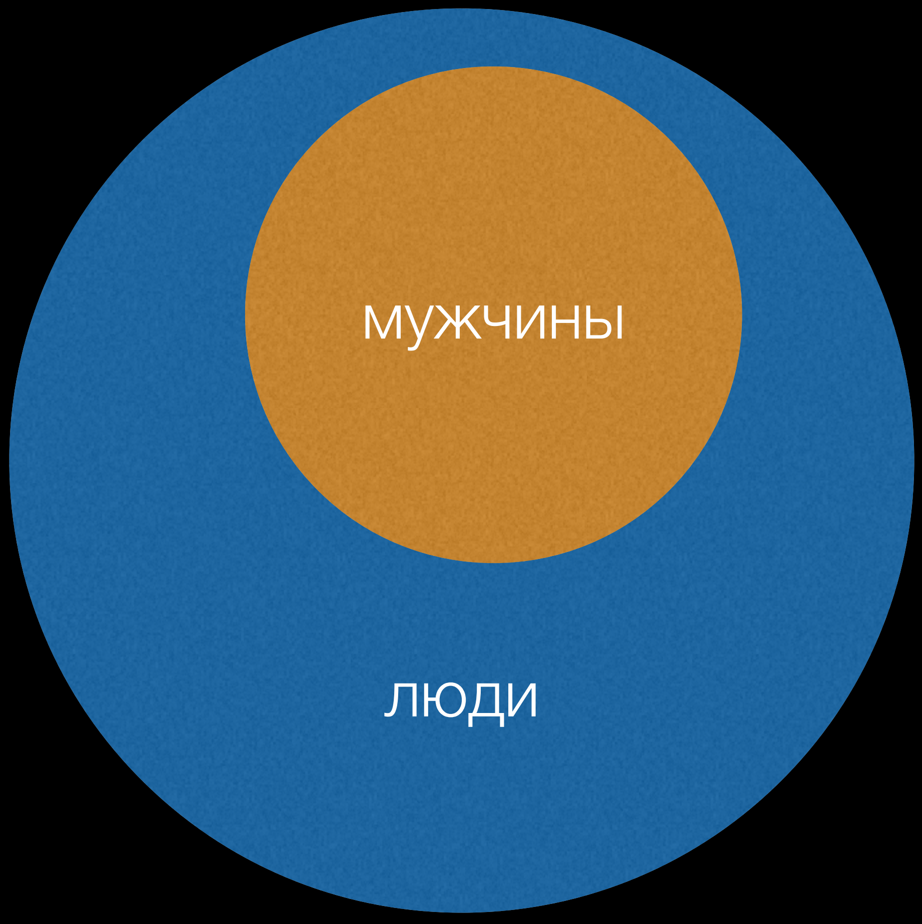
P = «Василий Тягин — потомок Васи Квакина»

$P(x,y)$ = «x — потомок y»

предикат

Определение 1.2. Множество A называется подмножеством множества B (обозначение: $A \subset B$), если любой элемент из A содержится также и в множестве B.

Определение 1.2. Множество A называется подмножеством множества B (обозначение: $A \subset B$), если любой элемент из A содержится также и в множестве B.

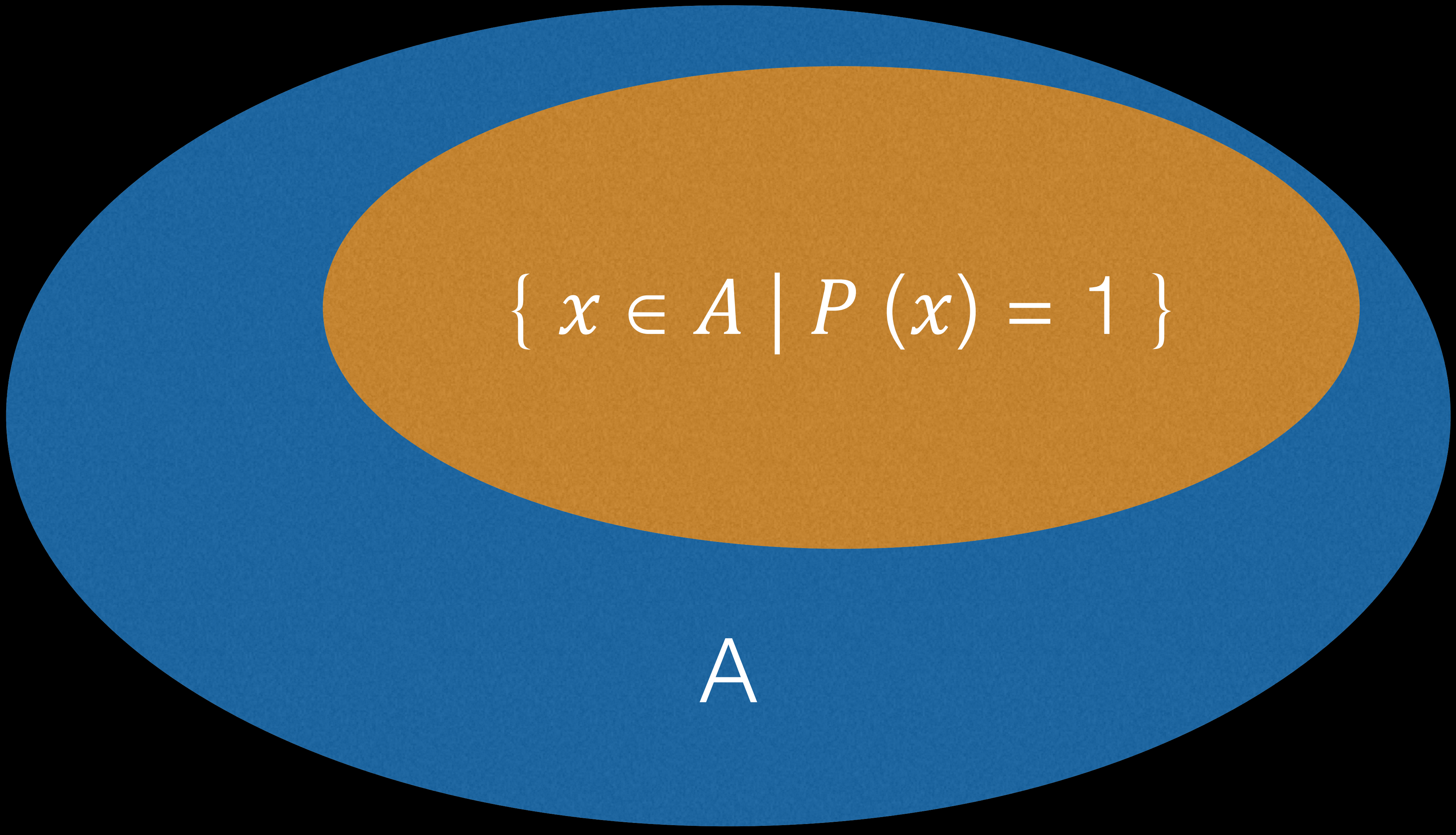


Определение 1.2. Множество A называется подмножеством множества B (обозначение: $A \subset B$), если любой элемент из A содержится также и в множестве B.

Определение 1.2. Множество A называется подмножеством множества B (обозначение: $A \subset B$), если любой элемент из A содержится также и в множестве B.

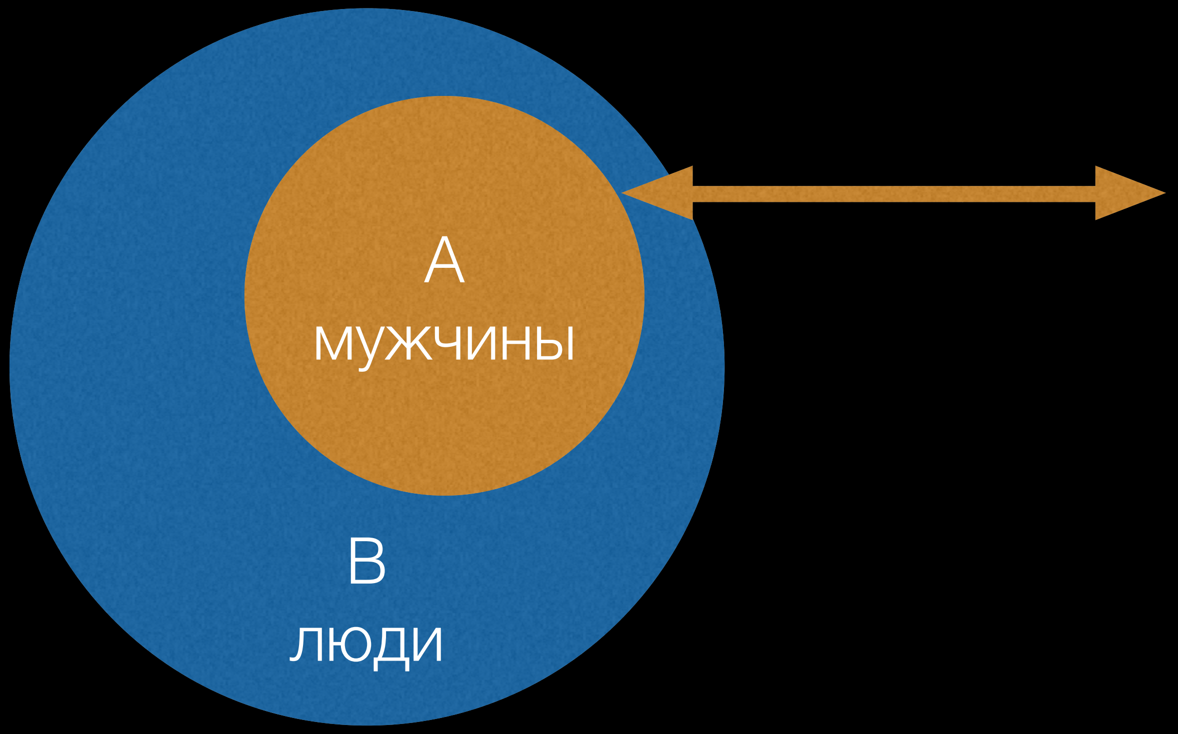
Причем тут предикат?

если $P\ (x)$ определён на множестве A,
то множество элементов, для которых $P(x) = 1$,
образует подмножество множества A



если нам задано $A \subset B$, то мы всегда можем определить предикат $P(x) = (x \in A)$, который будет однозначно характеризовать подмножество A

если нам задано $A \subset B$, то мы всегда можем определить предикат $P(x) = (x \in A)$, который будет однозначно характеризовать подмножество A



$P(x) = (x \in A) = 1$
когда x – мужчина

Определение 1.3. Запись $\forall x \in S,\ P\ (x)$ означает, что высказывание $P(x)$ истинно для всех элементов $x \in S$.

Определение 1.4. Запись $\exists x \in S,\ P\ (x)$ означает, что существует такой элемент $x \in S$, для которого $P(x)$ истинно.

квантор

Определение 1.3. Запись $\forall x \in S,\ P(x)$ означает, что высказывание $P(x)$ истинно для всех элементов $x \in S$.

Определение 1.4. Запись $\exists x \in S,\ P(x)$ означает, что существует такой элемент $x \in S$, для которого $P(x)$ истинно.

Пример 1.1.

Пусть H — множество людей.
Предикат $A(x,y)$ означает, что x является предком y.

Тогда запись $\forall y \in H\ \exists x \in H,\ A(x,\ y)$ читается как «для любого человека x найдётся такой человек y, что он будет предком для x»

или, по-людски,

«У любого человека есть предок».

Пример 1.2.

Пусть K — множество ключей и L — множество замков.

Высказывание $O(k,l)$ означает, что ключ k открывает замок l.

Тогда запись $\forall l \in L\ \exists k \in K,\ O(k,\ l)$ означает, что для каждого замка найдётся ключ.

$\forall y \exists x \in H, A(x, y)$

«У любого человека есть предок».

$\exists x \forall y \in H, A(x, y)$

«Существует некоторый человек, который является предком для любого другого человека»

Закон Де Моргана

1. $\neg\exists x, P(x) = \forall x, \neg P(x)$

2. $\neg\forall x, P(x) = \exists x, \neg P(x)$

~ доказательство

Пусть $A = \{a, b, \ldots, z\}$ — некоторое конечное множество. Тогда:

1. $\forall x \in A, P(x) = P(a) \wedge P(b) \wedge \ldots \wedge P(z)$

2. $\exists x \in A, P(x) = P(a) \vee P(b) \vee \ldots \vee P(z)$

Упражнение 1.6. Докажите (необязательно строго, можно и интуитивным рассуждением) следующие соотношения:

1. $\forall x, (P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x,\ P(x)) \wedge (\forall x,\ Q(x))$

2. $\exists x, (P(x) \vee Q(x)) = (\exists x,\ P(x)) \vee (\exists x,\ Q(x))$

3. $\forall x, (P(x) \wedge Q) = (\forall x,\ P(x)) \wedge Q$

4. $\exists x, (P(x) \wedge Q) = (\exists x,\ P(x)) \wedge Q$

5. $\forall x, (P(x) \vee Q) = (\forall x,\ P(x)) \vee Q$

6. $\exists x, (P(x) \vee Q) = (\exists x,\ P(x)) \vee Q$

Теорема 1.4. $\forall x, (P(x) \to Q) = (\exists x, P(x)) \to Q$.

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
\forall x, (P(x) \to Q) &= \forall x, (\neg P(x) \vee Q) \\
&= (\forall x, \neg P(x)) \vee Q \\
&= (\neg \exists x, P(x)) \vee Q \\
&= (\exists x, P(x)) \to Q
\end{aligned}
$$

Упражнение 1.7. Докажите, что

$$\forall x,\ (P \to Q(x)) = P \to (\forall x,\ Q(x)).$$

Упражнение 1.8. Продемонстрируйте, что в остальных случаях квантор уже нельзя так запросто «выносить за скобки», то есть приведите примеры, когда отчётливо видно следующее:

1. $\exists x, (P(x) \wedge Q(x)) \neq (\exists x,\ P(x)) \wedge (\exists x,\ Q(x))$

2. $\forall x, (P(x) \vee Q(x)) \neq (\forall x,\ P(x)) \vee (\forall x,\ Q(x))$

3. $\forall x, (P(x) \oplus Q) \neq (\forall x,\ P(x)) \oplus Q$

4. $\exists x, (P(x) \oplus Q) \neq (\exists x,\ P(x)) \oplus Q$