

Введение в логику

Лекция 1

Высказывание

“У меня есть кот”

“На улице идет снег”

Высказывание

“У меня есть кот” = a

“На улице идет снег” = b

Высказывание

“У меня есть кот” = a

“На улице идет снег” = b

$$a = 1$$

$$b = 0$$

Логические операции

- Логическое И (конъюнкция) $a \wedge b$

-

-

-

-

Логические операции

- Логическое И (конъюнкция) $a \wedge b$
- Логическое ИЛИ (дизъюнкция) $a \vee b$
-
-
-
-

Логические операции

- Логическое И (конъюнкция) $a \wedge b$
- Логическое ИЛИ (дизъюнкция) $a \vee b$
- Исключающее ИЛИ $a \oplus b$
-
-
-

Логические операции

- Логическое И (конъюнкция) $a \wedge b$
- Логическое ИЛИ (дизъюнкция) $a \vee b$
- Исключающее ИЛИ $a \oplus b$
- Эквиваленция $a \leftrightarrow b$
-
-

Логические операции

- Логическое И (конъюнкция) $a \wedge b$
- Логическое ИЛИ (дизъюнкция) $a \vee b$
- Исключающее ИЛИ $a \oplus b$
- Эквиваленция $a \leftrightarrow b$
- Не (отрицание) $\neg a$
-

Логические операции

- Логическое И (конъюнкция) $a \wedge b$
- Логическое ИЛИ (дизъюнкция) $a \vee b$
- Исключающее ИЛИ $a \oplus b$
- Эквиваленция $a \leftrightarrow b$
- Не (отрицание) $\neg a$
- Импликация $a \rightarrow b$

Таблица истинности

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \oplus b$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a$	$a \rightarrow b$

Таблица истинности

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \oplus b$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a$	$a \rightarrow b$
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

Таблица истинности

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \oplus b$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a$	$a \rightarrow b$
0	0	0					
0	1	0					
1	0	0					
1	1	1					

Таблица истинности

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \oplus b$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a$	$a \rightarrow b$
0	0	0	0				
0	1	0	1				
1	0	0	1				
1	1	1	1				

Таблица истинности

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \oplus b$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a$	$a \rightarrow b$
0	0	0	0	0			
0	1	0	1	1			
1	0	0	1	1			
1	1	1	1	0			

Таблица истинности

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \oplus b$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a$	$a \rightarrow b$
0	0	0	0	0	1		
0	1	0	1	1	0		
1	0	0	1	1	0		
1	1	1	1	0	1		

Таблица истинности

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \oplus b$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a$	$a \rightarrow b$
0	0	0	0	0	1	1	
0	1	0	1	1	0	1	
1	0	0	1	1	0	0	
1	1	1	1	0	1	0	

Таблица истинности

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \oplus b$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a$	$a \rightarrow b$
0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	0	1

Пример

$$((a \vee b) \leftrightarrow (c \wedge a)) \oplus b$$

Пример

$$((a \vee b) \leftrightarrow (c \wedge a)) \oplus b$$

пусть $a = 1, b = c = 0$

Пример

$$((a \vee b) \leftrightarrow (c \wedge a)) \oplus b$$

$$((1 \vee 0) \leftrightarrow (0 \wedge 1)) \oplus 0$$

Пример

$$((a \vee b) \leftrightarrow (c \wedge a)) \oplus b$$

$$\begin{aligned} ((1 \vee 0) \leftrightarrow (0 \wedge 1)) \oplus 0 = \\ (1 \leftrightarrow 0) \oplus 0 \end{aligned}$$

Пример

$$((a \vee b) \leftrightarrow (c \wedge a)) \oplus b$$

$$((1 \vee 0) \leftrightarrow (0 \wedge 1)) \oplus 0 =$$

$$(1 \leftrightarrow 0) \oplus 0 =$$

$$0 \oplus 0 = 0$$

Теорема 1.1

Для логических операций справедливы следующие законы:

АССОЦИАТИВНОСТЬ:

1. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c),$
2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$
3. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$

Теорема 1.1

АССОЦИАТИВНОСТЬ:

1. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c),$
2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$
3. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$

Теорема 1.1

АССОЦИАТИВНОСТЬ:

1. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c),$
2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$
3. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$

КОММУТАТИВНОСТЬ:

1. $a \wedge b = b \wedge a,$
2. $a \vee b = b \vee a,$
3. $a \oplus b = b \oplus a,$
4. $a \leftrightarrow b = b \leftrightarrow a.$

Теорема 1.1

АССОЦИАТИВНОСТЬ:

1. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c),$
2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$
3. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$

КОММУТАТИВНОСТЬ:

1. $a \wedge b = b \wedge a,$
2. $a \vee b = b \vee a,$
3. $a \oplus b = b \oplus a,$
4. $a \leftrightarrow b = b \leftrightarrow a.$

Теорема 1.1

АССОЦИАТИВНОСТЬ:

1. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c),$
2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$
3. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$

КОММУТАТИВНОСТЬ:

1. $a \wedge b = b \wedge a,$
2. $a \vee b = b \vee a,$
3. $a \oplus b = b \oplus a,$
4. $a \leftrightarrow b = b \leftrightarrow a.$

ДИСТРИБУТИВНОСТЬ

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$
3. $a \wedge (b \oplus c) = (a \wedge b) \oplus (a \wedge c).$

Теорема 1.1

АССОЦИАТИВНОСТЬ:

1. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c),$
2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$
3. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$

КОММУТАТИВНОСТЬ:

1. $a \wedge b = b \wedge a,$
2. $a \vee b = b \vee a,$
3. $a \oplus b = b \oplus a,$
4. $a \leftrightarrow b = b \leftrightarrow a.$

ДИСТРИБУТИВНОСТЬ

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$
3. $a \wedge (b \oplus c) = (a \wedge b) \oplus (a \wedge c).$

ДВОЙНОЕ ОТРИЦАНИЕ

1. $\neg\neg a = a.$

Теорема 1.1

Законы Де Моргана

1. $\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b),$
2. $\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b).$

Теорема 1.1

Мелочи:

$$1. a \wedge 1 = a,$$

$$2. a \wedge 0 = 0,$$

$$3. a \vee 1 = 1,$$

$$4. a \vee 0 = a,$$

$$5. a \oplus 0 = a,$$

$$6. a \oplus 1 = \neg a,$$

$$7. \neg(a \oplus b) = (a \leftrightarrow b),$$

$$8. a \wedge \neg a = 0,$$

$$9. a \vee \neg a = 1,$$

$$10. a \oplus \neg a = 1,$$

$$11. a \wedge a = a,$$

$$12. a \vee a = a,$$

$$13. a \oplus a = 0,$$

$$14. a \wedge (\neg a \vee b) = a \wedge b,$$

$$15. a \vee (\neg a \wedge b) = a \vee b.$$

Теорема 1.1

Для импликации:

$$1. a \rightarrow b = b \vee \neg a$$

$$2. \neg(a \rightarrow b) = a \wedge \neg b$$

$$3. a \rightarrow a$$

$$4. a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$$

$$5. \text{Транзитивность: } ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$$

$$6. (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \rightarrow b \vee c$$

$$7. (a \rightarrow b \wedge c) \rightarrow (a \rightarrow b)$$

$$8. a \rightarrow b = \neg b \rightarrow \neg a$$

Доказательство

- Интуитивный подход (“очевидно!”)
-

Доказательство

- Интуитивный подход (“очевидно!”)
- Вывод одного из другого

$$a \vee (\neg a \wedge b) = (a \vee \neg a) \wedge (a \vee b) = 1 \wedge (a \vee b) = a \vee b.$$

Доказательство

- Интуитивный подход (“очевидно!”)
- Вывод одного из другого
- Перебор всех вариантов с построением таблицы истинности

Доказательство дистрибутивности

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

a	b	c	$b \wedge c$	$a \wedge (b \vee c)$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
..
..
..
..
..

Из закона ассоциативности следует, что порядок скобок не важен:

$$(a \vee (b \vee c)) \vee d = (a \vee b) \vee (c \vee d) = a \vee b \vee c \vee d$$

Из закона ассоциативности следует, что порядок скобок не важен:

$$(a \vee (b \vee c)) \vee d = (a \vee b) \vee (c \vee d) = a \vee b \vee c \vee d$$

Из закона коммутативности следует, что порядок высказываний не важен:

$$(a \vee (b \vee c)) \vee d = b \vee d \vee c \vee a.$$

Эквивалентность ведет себя странно. Если построить таблицу истинности, то операция является ассоциативной:

$$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c = a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c).$$

Эквивалентность ведет себя странно. Если построить таблицу истинности, то операция является ассоциативной:

$$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c = a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c).$$

Но:

$$(1 \leftrightarrow 0 \leftrightarrow 0) = ((1 \leftrightarrow 0) \leftrightarrow 0) = (0 \leftrightarrow 0) = 1.$$

Что противоречит интуитивному пониманию “эквивалентности”

Эквивалентность ведет себя странно. Если построить таблицу истинности, то операция является ассоциативной:

$$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c = a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c).$$

Но:

$$(1 \leftrightarrow 0 \leftrightarrow 0) = ((1 \leftrightarrow 0) \leftrightarrow 0) = (0 \leftrightarrow 0) = 1.$$

Что противоречит интуитивному пониманию “эквивалентности”

$$a \leftrightarrow b \leftrightarrow c = (a \leftrightarrow b) \wedge (b \leftrightarrow c).$$

Закон Де Моргана

$$\neg(a \vee b \vee c) = \neg(a \vee (b \vee c)) = \neg a \wedge \neg(b \vee c) = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c.$$

Закон Де Моргана

$$\neg(a \vee b \vee c) = \neg(a \vee (b \vee c)) = \neg a \wedge \neg(b \vee c) = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c.$$

a = “Тане нравятся бритые мальчики”

Закон Де Моргана

$$\neg(a \vee b \vee c) = \neg(a \vee (b \vee c)) = \neg a \wedge \neg(b \vee c) = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c.$$

a = “Тане нравятся бритые мальчики”

b = “Тане нравятся мальчики в спортивных штанах”

Закон Де Моргана

$$\neg(a \vee b \vee c) = \neg(a \vee (b \vee c)) = \neg a \wedge \neg(b \vee c) = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c.$$

a = “Тане нравятся бритые мальчики”

b = “Тане нравятся мальчики в спортивных штанах”

$\neg(a \wedge b)$ = “Тане не нравятся бритые мальчики в спортивных штанах”

Закон Де Моргана

$$\neg(a \vee b \vee c) = \neg(a \vee (b \vee c)) = \neg a \wedge \neg(b \vee c) = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c.$$

a = “Тане нравятся бритые мальчики”

b = “Тане нравятся мальчики в спортивных штанах”

$\neg(a \wedge b)$ = “Тане не нравятся бритые мальчики в спортивных штанах”

$$\neg a \vee \neg b$$

Закон импликации

Если из a следует b , а из b следует c , то из a следует c .

$$a \rightarrow b = \neg b \rightarrow \neg a$$

Домашнее задание

- Докажите оставшиеся формулы Теоремы 1.1
- Придумайте интуитивные соображения для них