# Введение в логику

Лекция 2

hexlet.org

# Функция $f$

| $a$ | $b$ | $c$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

# Функция $g_0$

Принимает три параметра: $a$, $b$ и $c$

При параметрах (1, 0, 1) – имеет значение 1
Во всех остальных случаях – 0.

$$g_0(a, b, c) = a \wedge \neg b \wedge c.$$

# Функция $g_1$

Принимает три параметра: $a$, $b$ и $c$

При параметрах (0, 0, 0) – имеет значение 1
Во всех остальных случаях – 0.

$$g_1(a, b, c) = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c.$$

# Функция h

Принимает три параметра: $a$, $b$ и $c$

При параметрах (1, 0, 1) и (0, 0, 0) – имеет значение 1
Во всех остальных случаях – 0.

# Функция h

Принимает три параметра: $a$, $b$ и $c$

При параметрах (1, 0, 1) и (0, 0, 0) – имеет значение 1
Во всех остальных случаях – 0.

Значение функции h истинно, когда истинно значение хотя бы одной из функций $g_0$ и $g_1$.

# Функция h

Принимает три параметра: $a$, $b$ и $c$

При параметрах (1, 0, 1) и (0, 0, 0) – имеет значение 1
Во всех остальных случаях – 0.

Значение функции h истинно, когда истинно значение хотя бы одной из функций $g_0$ и $g_1$.

$$h(a, b, c) = g_0(a, b, c) \vee g_1(a, b, c).$$

$$h(a, b, c) = (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c).$$

| $a$ | $b$ | $c$ | $f$ | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | $\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | $\neg a \wedge b \wedge \neg c$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $a \wedge \neg b \wedge \neg c$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | $a \wedge \neg b \wedge c$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | |

$$f(a,b,c) =$$
$$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)$$

# Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)

Disjunctive normal form (DNF)

$$f(a,b,c) = (\neg a \land \neg b \land \neg c) \lor (\neg a \land b \land \neg c) \lor (a \land \neg b \land \neg c) \lor (a \land \neg b \land c)$$

дизъюнкция
(disjunction)

# Обратный вариант

$$\neg f\ (a,\ b,\ c) = (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$$f(a,b,c) = (a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$$

# Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

Conjunctive normal form (CNF)

$$\neg f\ (a,\ b,\ c) = (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$$f(a,b,c) = (a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$$

конъюнкция
(conjunction)

| $a$ | $b$ | $c$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

$$f(a,b,c) = (\neg a \land \neg b \land \neg c) \lor (\neg a \land b \land \neg c) \lor (a \land \neg b \land \neg c) \lor (a \land \neg b \land c)$$

$$f(a,b,c) = (a \lor b \lor \neg c) \land (a \lor \neg b \lor \neg c) \land (\neg a \lor \neg b \lor c) \land (\neg a \lor \neg b \lor \neg c)$$

| $a$ | $b$ | $a \to b$ |
| --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

ДНФ: $a \to b = (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge b)$

КНФ: $a \to b = \neg a \vee b$

| $a$ | $b$ | $c$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

| $a$ | $b$ | $c$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

$$f\ (a, b, c) = (\neg a \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b)$$

# Теорема 1.2

Любая логическая функция может быть представлена с помощью операций «И», «ИЛИ» и «НЕ».

# Теорема 1.2

Любая логическая функция может быть представлена с помощью операций «И», «ИЛИ» и «НЕ».

# Теорема 1.3

Любая логическая функция может быть представлена с помощью операций «И», «исключающее ИЛИ» и константы 1.

# Теорема 1.3

Любая логическая функция может быть представлена с помощью операций «И», «исключающее ИЛИ» и константы 1.

Доказательство:

Операции ИЛИ и НЕ можно представить через $\wedge$, $\oplus$ и 1:

Представление ИЛИ: $a \vee b = a \oplus b \oplus (a \wedge b)$

Представление НЕ: $\neg a = a \oplus 1$

Имея $\wedge$, $\oplus$ и 1 можно получить $\vee$ и $\neg$.

Следовательно, через $\wedge$, $\oplus$ и 1 можно представить любую функцию.

# $\wedge$, $\oplus$ и 1 – базис Жегалкина

1. $a \wedge b$ записывается просто как $ab$ и называется умножением;
2. $a \oplus b$ записывается как $a + b$ и называется сложением.

1. $a \vee b = a + b + ab$,
2. $\neg a = a + 1$,
3. $a(b + c) = ab + ac$,
4. $aa = a$,
5. $a + a = 0$.

# Пример: выражение импликации в базисе Жегалкина

$$a \to b =$$
$$\neg a \vee b =$$
$$(1 + a) + b + b(1 + a) =$$
$$1 + a + b + b + ab =$$
$$1 + a + ab$$

| $a$ | $b$ | $a \to b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

1. $a \vee b = a + b + ab$,
2. $\neg a = a + 1$,
3. $a(b + c) = ab + ac$,
4. $aa = a$,
5. $a + a = 0$.

# Обратная задача

| $a$ | $b$ | $a \to b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | ? |
| 0 | 1 | ? |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $a$ | $b$ | $a \to b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | ? |
| 0 | 1 | ? |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Требование: транзитивность
$((a \to b) \land (b \to c)) \to (a \to c)$.

| $a$ | $b$ | $a \to b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | **1** |
| 0 | 1 | ? |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Требование: транзитивность
$((a \to b) \land (b \to c)) \to (a \to c)$.

Пусть $a = b = 1$, $c = 0$.
$((1 \to 1) \land (1 \to 0)) \to (1 \to 0)$
$(1 \land 0) \to 0$
$0 \to 0$ (должно быть истиной)

| $a$ | $b$ | $a \to b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | ? |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Требование: транзитивность
$((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$.

Пусть $a = b = 1$, $c = 0$.
$((1 \to 1) \wedge (1 \to 0)) \to (1 \to 0)$
$(1 \wedge 0) \to 0$
$0 \to 0$ (должно быть истиной)

Зная, что $(0 \to 0) = 1$, пусть $a = c = 1$, $b = 0$.
$((1 \to 0) \wedge (0 \to 1)) \to (1 \to 1)$
$(0 \wedge ?) \to 1$
$0 \to 1$
Получим, что $0 \to 1$ должно быть истиной.

| $a$ | $b$ | $a \to b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Требование: транзитивность
$((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$.

Пусть $a = b = 1$, $c = 0$.
$((1 \to 1) \wedge (1 \to 0)) \to (1 \to 0)$
$(1 \wedge 0) \to 0$
$0 \to 0$ (должно быть истиной)

Зная, что $(0 \to 0) = 1$, пусть $a = c = 1$, $b = 0$.
$((1 \to 0) \wedge (0 \to 1)) \to (1 \to 1)$
$(0 \wedge ?) \to 1$
$0 \to 1$
Получим, что $0 \to 1$ должно быть истиной.

# Домашнее задание

Упражнение 1.2. Выведите формулу для эквиваленции:

$$a \leftrightarrow b = 1 + a + b$$

# Домашнее задание

Упражнение 1.2. Выведите формулу для эквиваленции:

$$a \leftrightarrow b = 1 + a + b$$

Упражнение 1.3. Выведите формулу для упомянутой ранее функции $f$.

# Домашнее задание

Упражнение 1.2. Выведите формулу для эквиваленции:

$$a \leftrightarrow b = 1 + a + b$$

Упражнение 1.3. Выведите формулу для упомянутой ранее функции $f$.

Упражнение 1.4. Докажите, что любая логическая функция может быть выражена с помощью лишь одной операции «штрих Шеффера», которая определяется как $a \mid b = \neg(a \wedge b) = 1 + ab$. (Использование значений 1 или 0 в записи тоже недопустимо.)

# Домашнее задание

Упражнение 1.5. Можно было бы определить импликацию, опираясь не на свойство транзитивности, а на закон исключённого третьего ($a \wedge \neg a = 0$) и тот факт, что эквивалентность подразумевает в том числе и следствие: $(a \leftrightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b)$.

Используя эти два свойства, определите таблицу истинности для импликации, не используя транзитивности.